Nogle Bemærkninger om Sandsynlighedsregningens Anvendelse til at maale Styrken af de Aarsager, der begunstige et Phænomen, som uafbrudt har vist sig gjentagne Gange,

meddelte af Prof. **Steen.**

1. Naar af to Begivenheder stedse enten kun den ene eller den anden indtræffer, saa at de udelukke hinanden gjensidig, og den ene under visse givne Forhold er indtruffen m Gange, men den anden slet ikke, saa er der, som bekjendt, en stor Sandsynlighed for, at der gives Aarsager, som begunstige den indtrufne Begivenhed. Ifølge Bayes Regel er denne Sandsynlighed

$$\varpi = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^m\,dx}{\int_0^1 x^m\,dx} = \frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}.$$

Men herved er kun angivet Sandsynligheden for, at Begivenheden overhovedet er begunstiget, om noget Maal for Begunstigelsen er der ikke Tale.

Vel har man en Beregning af Sandsynligheden for, at den m Gange indtrufne Begivenhed skal fremkomme paany, nemlig

$$p' = \frac{\int_0^1 x^{m+1}\,dx}{\int_0^1 x^m\,dx} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Denne Størrelse eller dens Forhold til Sandsynligheden $p'' = 1-p'$ for dens Ikke-Indtræffen skulde synes skikket til Maal for Begunstigelsen, idet den større Sandsynlighed aabenbart tyder paa en større Begunstigelse. Jo større p', desto flere gunstige Tilfælde i Forhold til de mulige, og jo større $\frac{p'}{1-p'}$, desto større Forholdet imellem de gunstige og de ugunstige Tilfældes Antal.

Men en nærmere Betragtning af Maaden, hvorpaa p' er dannet, vil vise, at p' eller $\frac{p'}{1-p'}$ dog ikke afgiver noget passende Maal for Begunstigelsen. Udtrykket for p' er næmlig dannet under den Forudsætning, at af de uendelig mange Værdier, som Sandsynligheden x for Begivenheden kan have, har enten den ene eller den anden gjort sig gjældende, men enhver af dem med samme Styrke. Nu viser jo netop Bayes Regel, at denne Antagelse ikke er rigtig, saasom den netop giver en høj Grad af Sandsynlighed for, at Begivenhedens Chance er over $\frac{1}{2}$.

Et langt mere passende Maal for Styrken af de begunstigende Aarsager vil man faae, naar man søger Grændsen imellem de Sandsynligheder for og imod Begivenheden, som med ligestor Rimelighed kunne antages; naar denne Grændse er funden, har man Sandsynligheden $\frac{1}{2}$ for, at Begivenhedens Chance ligger paa den ene Side deraf, og den samme Sandsynlighed for dens Beliggenhed paa den anden Side. Dette kan tilmed anskueliggjøres ved en meget simpel graphisk Fremstilling. De mulige Værdier af Sandsynligheden for Begivenheden danne næmlig en kontinuerlig Række af Værdier fra 0 til 1 og kunne altsaa afsættes som Abscisser paa en ret Linie af Længden 1, fra den ene Ende, Nulpunktet, henimod det andet med 1 betegnede Endepunkt. Afsættes nu saaledes den Sandsynlighed ω, som danner den ovennævnte Grændse imellem de ligestore Rimeligheder for og imod Begivenheden, saa findes et Punkt M i Linien 01, der ved sin større eller mindre Nærhed ved Punktet 1 giver et anskueligt Billede af de begunstigende Aarsagers Styrke. Jo nærmere denne Grændse M ligger ved 1, desto stærkere maae de begunstigende Aarsager være, thi paa et desto snevrere Interval nærmest ved 1 har man Sandsynligheder sammentrængte, der virke for Begivenheden med samme Rimelighed, som alle de andre paa et videre Interval nærmest ved 0 fordelte. Det er klart, at Styrken ogsaa kan maales ved Forholdet imellem $0M$ og $M1$, hvilket betegnes

$$\frac{0M}{M1} = \alpha = \frac{\omega}{1-\omega}.$$

Denne Grændsebestemmelse beroer nu alene paa en Generalisation af Bayes Regel.

2. Antages der m Gange at være trukket en hvid Kugle af en Urne og ingensinde nogen ikke-hvid, saa vil man finde den Rimelighed, der er for, at Urnen indeholder hvide Kugler i et Forhold til ikke-hvide, som mindst er $\alpha = \frac{p}{q}$, udtrykt saaledes

$$\varpi = \frac{\int_\omega^1 x^m\,dx}{\int_0^1 x^m\,dx} = 1 - \omega^{m+1}, \quad \omega = \frac{p}{p+q}.$$

Sættes dernæst $\varpi = \frac{1}{2}$, findes

$$\omega = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad 1 - \omega = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

følgelig

$$\alpha = \frac{\omega}{1-\omega} = \frac{1}{2^{\frac{1}{m+1}} - 1}.$$

Denne Sammensætning af Urnen er den, som har ligesaa meget for sig, som imod sig, naar m Trækninger have givet lutter hvide Kugler. Forholdet imellem Antallet af hvide og ikkehvide Kugler kan med ligesaa megen Rimelighed sættes over, som under den i sidste Formel angivne Størrelse af α. Dette Forhold danner den i 1 omtalte Grændse imellem de lige stærke Grupper af Chancer for Begivenheden. Men det her fundne Resultat overføres, som ved mange lignende Undersøgelser, ligefrem paa alle Tilfælde, hvor en Begivenhed indtræffer uafbrudt m Gange; det fundne Udtryk for α tjener altsaa til Maal for Styrken af de Aarsager, der begunstige Begivenheden.

3. Ved den praktiske Anvendelse af Formlen for α kan en let og hurtig Approximation sættes istedenfor det nøjagtige Udtryk. Det vil næmlig aldrig være nyttigt at angive α med mere end een Decimal, og det endda kun, naar α er lille; i andre Tilfælde vil endog blot et helt Tal rigeligt udtrykke, hvad man behøver. Dertil bruges Rækkeudviklingen

$$2^{\frac{1}{m+1}}-1=\frac{\log 2}{\log e}\frac{1}{m+1}+\left(\frac{\log 2}{\log e}\right)^2\frac{1}{2(m+1)^2}+\left(\frac{\log 2}{\log e}\right)^3\frac{1}{2.3(m+1)^3}\cdots,$$

hvor e er Grundtallet for de naturlige Logarithmer. Ved at indsætte dette i Udtrykket for α og anvende Rækken for $\frac{1}{1+x}$ faaer man

$$\alpha=\frac{\log e}{\log 2}(m+1)-0,5+\frac{\log 2}{\log e}\frac{1}{12(m+1)},$$

idet man for det næste Led, som skulde indeholde $\frac{1}{(m+1)^2}$, erholder Nul til Koefficient, medens det følgende

$$\left(\frac{\log 2}{\log e}\right)^3\frac{1}{720(m+1)^3},$$

saavelsom de øvrige, bliver meget lille, næmlig allerede for $m=1$ ikkun c. 0,00006. Selv det sidste af de beholdte Led faaer aldrig væsentlig Indflydelse; $m=1$ gjør det til 0,0247.

Da man endvidere har

$$\frac{\log 2}{\log e}=0,6931472,\quad \frac{\log e}{\log 2}=1,4426950,$$

saa er

$$\alpha=1,4426950\,(m+1)-0,5$$

tilstrækkelig til i alle Tilfælde at bestemme Grændsen imellem de Grupper af Chancer, som have lige megen Rimelighed.

Var man bleven staaende ved at betragte som Maal for de begunstigende Aarsagers Styrke det før omtalte Forhold

$$\frac{p'}{1-p'}=m+1,$$

saa vilde dette altsaa, efter det her Fundne, være næsten halvanden Gang for lidet.

Det følger af det Foregaaende, at man ogsaa for Begivenhedens fornyede Indtræffen har Sandsynligheden nøjagtigere bestemt ved

$$\omega=\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{1,4426950\,(m+1)-0,5}{1,4426950\,(m+1)+0,5},$$

hvoraf

$$1-\frac{0,6931472}{m+2} > \omega > 1-\frac{0,6931472}{m+1},$$

end ved

$$p' = 1-\frac{1}{m+2}.$$

Det ses endog let, at p' ligger udenfor de angivne Grændser for ω, fordi

$$1-\frac{0,6931472}{m+1}-\left(1-\frac{1}{m+2}\right) = \frac{0,31m-0,38}{(m+1)(m+2)} > 0,$$

og at Afvigelsen fra ω aftager, naar m voxer.

4. Til Sagens nærmere Belysning berøres kun et Par nærliggende Exempler.

De hidtil opdagede 94 Planeter bevæge sig alle om Solen i samme Retning. Af $m+1=95$ findes med Bortkastelse af Decimalerne $\alpha = 137$, men $\frac{p'}{1-p'} = 95$, fremdeles $p' = 0,98958$, men $0,99278 > \omega > 0,99271$. De Aarsager, der begunstige den omtalte Ensartethed i Planeternes Bevægelse, have altsaa en Styrke, der passende maales ved 137; deres Forhold til de modvirkende Aarsager er snarere over end under 136.

Er der i et Ægteskab født 9 Børn, alle af samme Kjøn, altsaa $m+1=10$, faaes $\alpha = 13,9$, $\frac{p'}{1-p'} = 10$, $0,997 > \omega > 0,931$, $p' = 0,909$. De begunstigende Aarsagers Styrke viser sig snarere over end under 13. Den større Afvigelse imellem p' og ω er begrundet i m's lave Værdi.